ЛЕКЦИЯ 2. СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

Сергей Николенко

1. Системы и их основные свойства

Речь по сути представляет собой физический сигнал, передаваемый по воздуху. В этой лекции будем рассматривать речь именно с этой стороны. Будем применять скорее инженерный подход, чем математический, к построению и описанию сигналов. Для описания звука будем пытаться переходить от непрерывного аналогового сигнала, который представляет собой продольную волну в воздухе и несёт слишком много информации для обработки, к набору дискретных переменных. С математической точки зрения это переход из бесконечномерного пространства в конечномерное. Более того, по дороге сигнал может потребоваться как-нибудь преобразовать. Такие преобразования будут осуществляться посредством пропускания исходного сигнала $x(t)$ через некий «чёрный ящик», который мы будем называть *системой*. На выходе системы получается преобразованный выходной сигнал $y(t)$:

$$x(t) \to \boxed{?} \to y(t).$$

В принципе система может быть какой угодно и выполнять любые преобразования. Ограничим возможности систем для применимости их для работы со звуком и речью. Перечислим некоторые интересующие нас свойства систем.

(1) *Причинность (обусловленность)* — причина не может быть позже следствия. Математически это свойство записывается так:

$$\forall x_1, x_2\ \forall t \le t_0\ x_1(t) = x_2(t) \quad \Rightarrow \quad \forall t \le t_0\ y_1(t) = y_2(t).$$

Заметим, что правую часть следствия можно было бы записать и просто как $y_1(t) = y_2(t)$, кванторы это позволяют.

(2) *Линейность.*

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \to \boxed{?} \to \alpha y_1(t) + \beta y_2(t).$$

Отсюда следует, что нулевой сигнал посредством линейной системы преобразуется именно в нулевой.

(3) *Стационарность.*

$$x(t) \to y(t) \quad \Rightarrow \quad \forall t_0\ x(t - t_0) \to y(t - t_0)$$

В реальном мире любой звуковой сигнал является непрерывным. Однако такой сигнал иногда несёт слишком много информации. Кроме непрерывных сигналов, система может работать и с более простыми дискретными, которые представляют собой последовательность значений реального сигнала, взятых в определённые моменты времени:

$$x[n] \to \boxed{?} \to y[n].$$

Законспектировал Олег Дахин.

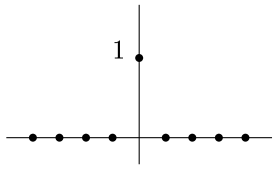

Рис. 1. Дельта–функция.

Но не все рассматриваемые нами системы будут обладать всеми тремя вышеперечисленными свойствами.

Приведём простейшие примеры:

- непричинная система — $y[n] = x[n+1]$;
- нестационарная система — $y[n] = x[2n]$.

В этой лекции мы ограничимся рассмотрением линейно-стационарных систем. Как следует из названия, такие системы обладают свойствами линейности и стационарности. Для простоты начнём рассмотрение с дискретного случая.

2. Дискретные сигналы в линейно-стационарных системах

Для дальнейшего изложения нам понадобятся приведённые ниже определения.

Определение 1. Преобразование Фурье — *это интегральное преобразование, которое переводит функцию $f(x)$ в функцию $F(x)$ следующим образом:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itx} dt.$$

Преобразование берёт представление функции сигнала в виде временных рядов и отображает его в частотный спектр. Иначе говоря, оно превращает функцию времени в функцию частоты. Это разложение функции на гармонические составляющие на различных частотах, и когда функция f является функцией времени и представляет собой физический сигнал, преобразование имеет стандартную интерпретацию как спектр сигнала.

Давайте научимся использовать свойства системы для того, чтобы проще было её определять. Установим результаты действия системы на некоторые виды сигналов. Сначала подадим на вход один из простейших сигналов — так называемую *δ-функцию*, или единичный импульс.

Определение 2. *Дискретная* δ-функция *— последовательность $\delta[n]$, которая в нуле равна единице, а во всех остальных точках — нулю:*

$$\delta[0] = 1, \quad \forall n \neq 0 \ \delta[n] = 0.$$

На рис. 1 показано, как выглядит δ-функция.

После подачи системе единичного импульса на выходе получим некий сигнал $h(t)$. Выясним, как он выглядит. По линейности и стационарности из $\delta[n] \to h[n]$ получаем:

$$\begin{aligned} a\delta[n] &\to ah[n], \\ \delta[n-k] &\to h[n-k]. \end{aligned}$$

Мы начали с действия именно на единичный импульс, потому что любую входную последовательность можно разложить в сумму δ-функций по всем точкам. Таким образом, для всякого дискретного сигнала

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

получаем, что

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k].$$

Давайте подробнее рассмотрим выражение в правой части последней формулы. Оно очень напоминает операцию свёртки функций для дискретного случая.

Определение 3. Свёрткой *двух функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *называется функция*

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y) f_2(y) dy.$$

Свёртка обозначается как $\varphi(x) = f_1(x) * f_2(x)$

Теорема 1 (Свойства свёртки)**.** *Свёртка обладает следующими свойствами.*

(1) *Коммутативность:*

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1.$$

(2) *Ассоциативность:*

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3.$$

(3) *Дистрибутивность:*

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3.$$

(4) *Ассоциативность умножения на скаляр:*

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a(f * g) = (af) * g = f * (ag).$$

(5) *Правило дифференцирования:*

$$(f * g)' = (f') * g + f * (g').$$

(6) *Преобразование Фурье переводит операцию свёртки в произведение: если под действием преобразования Фурье* $f(x)$ *и* $g(x)$ *переходят в* $F(x)$ *и* $G(x)$ *соответственно, то* $F(x)G(x)$ *является образом преобразования Фурье для функции* $f(x) * g(x)$.

Доказательство. Первое, третье и четвёртое свойства очевидны. Второе легко получается при помощи замены переменных.

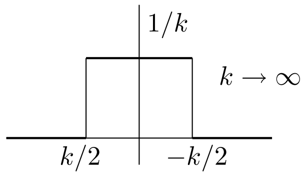

Рис. 2. Единичный импульс в пределе.

Пятое:

$$\left(\int\limits_{-n}^{n} f(n-y)g(y)dy\right)' = f(n)g(0) - f(-n)g(2n) =$$

$$= f(x)g(n-x)|_{-n}^{n} = \int\limits_{-n}^{n} f(x)g'(n-x)dx + \int\limits_{-n}^{n} g(n-x)d(f(x)) =$$

$$= \int\limits_{-n}^{n} f(x)g'(n-x)dx + \int\limits_{-n}^{n} f'(x)g(n-x)dx,$$

и пятое свойство получается при $n \to \infty$.

Шестое:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dye^{-itx}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)dy\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-itx}dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)dy\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-it(z+y)}dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ity}dy\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-itz}dz = G(t)F(t).$$

□

Раз результат после действия системы на любой сигнал удаётся выразить через единичный импульс и его преобразование в системе, то можно заключить, что линейно-стационарная система полностью задаётся своей реакцией на единичный импульс, а именно

$$y = x * h.$$

3. Непрерывные сигналы в линейно-стационарных системах

От упрощённой дискретной модели перейдём к рассмотрению непрерывных сигналов. В этом случае производятся все аналогичные выкладки, только с учетом перехода к непрерывности.

Единичный импульс в предельном переходе трансформируется в фигуру показанного на рис. 2 вида.

Тогда, рассматривая график непрерывной функции как набор дискретных значений этой функции с неким шагом Δ, получаем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta \cdot x(k\Delta) \xrightarrow[\Delta\to 0]{} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt.$$

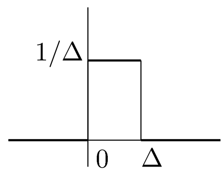

Рис. 3. Функция δ_Δ.

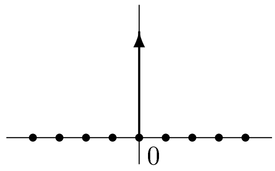

Рис. 4. δ–функция.

Рассмотрим δ_Δ-функцию, график которой изображён на рис. 3.

После действия системы $\delta_\Delta(t) \to h_\Delta(t)$. По свойству стационарности

$$\sigma_\Delta(t + k\Delta) \to h_\Delta(t + k\Delta).$$

Рассмотрим:

$$\chi_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_\Delta(t - k\Delta) \cdot \Delta \to \sum_k x(k\Delta) h_\Delta(t - k\Delta)\Delta$$

Слева здесь записано ступенчатое приближение функции $x(t)$. Уменьшая величину шага, выразим входной сигнал через δ_Δ-функцию по аналогии с дискретным случаем (конечно, на самом деле здесь нужно сказать много слов об условиях непрерывности, при которых это возможно, но давайте для простоты предполагать, что у нас все функции хорошие):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \xrightarrow[\Delta \to 0]{} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Теперь δ-функция определяется так: её значения везде, кроме нуля — ноль, а интеграл её равен единице. Графически её обычно изображают так, как показано на рис. 4.

Рассмотрим способы задания такой функции:

- δ-функцию можно рассматривать как меру, заданную условием

  $$\int x(\tau)d\delta = x(0);$$

- с другой стороны, δ-оператор

  $$\delta[f] = f(0)$$

  представляет собой линейный оператор $L^1 \to L^1$ или $L^2 \to L^2$;
- ну и, наконец, δ можно ввести как единицу операции свёртки:

  $$\forall x \quad x = x * \delta = \delta * x.$$

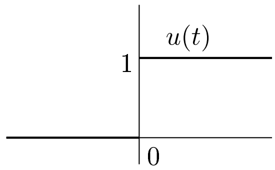

Рис. 5. Функция $u(t)$.

В итоге мы получили, что линейная стационарная система полностью определяется своим поведением на δ-функции:

$$\begin{array}{rcl} \delta(t) & \to \boxed{?} \to & h(t), \\ x(t) = \int x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau & \to \boxed{?} \to & \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau = y(t). \end{array}$$

4. Дифференциаторы и интеграторы

Рассмотрим несколько важных примеров, демонстрирующих возможности систем.

Определение 4. Дифференциатором *называется линейно-стационарная система, которая выдаёт дифференцированную входную функцию.*

$$x(t) \to \boxed{?} \to \frac{dx(t)}{dt}$$

Построим такую систему, как всегда, начиная с δ-функции.

$$\delta(t) \to \boxed{?} \to \delta'(t).$$

Введём теперь функцию u_1 по правилу

$$x * u_1 = x'.$$

Увеличивая порядок дифференцирования, можно получить ряд функций

$$u_k : \quad x * u_k = \frac{d^k x}{dt^k},$$

где каждая из u_k получается из предыдущей по ассоциативности свёртки.

Аналогично вводится и интегратор.

Определение 5. Интегратором *называется линейно-стационарная система, которая выдаёт интеграл входной функции.*

$$x(t) \to \boxed{?} \to \int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Для описания такой системы нам понадобится подсчитать интеграл δ-функции. Из определения последней получается, что это ступенчатая функция $u(t)$, изображённая на рис. 5:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau.$$

Обозначив $u(t)$ как $u_{-1}(t)$ и положив $u_0 = \delta$, $u_1 = \delta'$ и так далее, можно объединить интеграторы и дифференциаторы в единую последовательность функций

$$\{u_k\}_{-\infty}^{\infty}, \text{ где } u_k * u_l = u_{kl}.$$

Интеграторы и дифференциаторы имеют широкое применение в практике конструирования аналоговых систем. Они являются базовым элементами микроэлектроники, используются для построения фильтров, генераторов и других важных элементов схем.

5. Собственные функции системы

Перед нами стоит задача задания системы. Ранее были проведены попытки определить преобразователь сигнала на основе действия на единичный импульс. Однако для этого требуется определить вид функции $h(t)$, что является в общем виде сложной задачей: функция — очень уж многомерный объект.

Здесь мы рассмотрим другой подход к упрощению. Разложим входной сигнал $x(t)$ в виде набора коэффициентов $\{a_k\}_{-\infty}^{\infty}$ на базисе:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varphi_k(t),$$

причём так, чтобы функции $\varphi_k(t)$ являлись собственными функциями системы.

Определение 6. *Если при действии оператора на некоторую функцию получается та же самая функция, умноженная на скаляр:*

$$Af = \lambda f,$$

то такую функцию f называют собственной функцией *оператора A, а число λ — его* собственным значением.

В нашем случае роль оператора играет преобразование функции-сигнала в системе. При этом

$$\varphi_k(t) \to \lambda_k \varphi_k(t),$$

где $\lambda_k \in \mathbb{R}$ — собственные числа, $\varphi_k(t)$ — собственные функции.

Вернёмся к задаче задания системы. Для этого разложим $x(t)$ по собственным функциям:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varphi_k(t) \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k a_k \varphi_k(t)$$

Вспомним, что

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau \to \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

и

$$x(t) \to \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

Теперь нам требуется выделить из правой части этого выражения собственные числа и функции. Для этого хотелось бы выбрать такую $x(t)$, чтобы

$$x(t-\tau) = x(t) \cdot x(-\tau).$$

Тогда выражение преобразуется в требуемое:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \lambda \cdot x(t).$$

Нетрудно убедиться, что этому свойству удовлетворяет экспонента.

Лемма 1 (Собственные фукции непрерывной системы). *Функции e^{st} для любого $s \in \mathbb{C}$ являются собственными функциями всякой линейно-стационарной системы с собственными числами*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau.$$

Доказательство. Подставив, получим:

$$e^{st} \to \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau.$$

□

А для дискретных систем по коммутативности свёртки

$$x[n] \to \sum x[k]h[n-k] = \sum h[k]x[n-k].$$

В этом случае для задания системы подходит показательная функция.

Лемма 2 (Собственные фукции дискретной системы). *Сигнал $x[n] = z^n$ для любого $z \in \mathbb{C}$ является собственной функцией всякой линейно-стационарной дискретной системы с собственным числом*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}.$$

Доказательство. Подставив, получим:

$$z^n \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{n-k} = z^n \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}.$$

□

Итак, в этой лекции мы ввели понятие системы, рассмотрели несколько поясняющих примеров, а также способы задания системы. С помощью систем и преобразований Фурье далее будет введена частотная характеристика сигнала

$$x(t) \longrightarrow X(i\omega).$$